Définition. Un **espace de Hilbert** est un espace vectoriel complet de dimension quelconque (y compris infinie) muni d'un produit scalaire.

Définition. Pour X un ensemble au plus dénombrable, et $\mathbb{R}$ un espace vectoriel, on appelle $\ell^2(X,\mathbb{R})$ les espaces des suites et fonctions à valeurs réelles carré-sommables indexées sur $\mathbb{R}$, c.à.d. les $(a_x)_{x\in X} \in \mathbb{R}^X$ tels que $\sum\limits_{x\in X} \|a_x\|_{\mathbb{R}}^2 = 0$, où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$ est définie comme l'application $\cdot \mapsto \sqrt{\langle \cdot,\cdot\rangle}$.

Théorème. Tous espaces de Hilbert $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$, avec des bases hilbertiennes $(g_i)_{i\in I}$ et $(h_j)_{j\in J}$, si indexées sur des ensembles I et J de mêmes cardinaux (c.à.d. équipotentes) et au plus dénombrables, sont isométriquement isomorphes entre eux, et plus spécifiquement à $\ell^2(\mathbb{N}\cap[0,\mathrm{card}(I)[,\mathbb{R}) = \ell^2(\mathbb{N}\cap[0,\mathrm{card}(J)[,\mathbb{R})$ dans le cas fini, ou $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ dans le cas infini dénombrable. (1)

Preuve. Soit $\phi : I \to J$ une bijection. Alors, on peut démontrer que $\varphi_{\mathcal{G}} : x \in \mathcal{G} \mapsto (\langle x, g_i\rangle)_{i\in I} \in \ell^2(I,\mathbb{R})$ et $\varphi_{\mathcal{H}} : x \in \mathcal{H} \mapsto (\langle x, h_{\phi(i)}\rangle)_{i\in I} \in \ell^2(I,\mathbb{R})$ sont des isomorphismes linéaires et isométriques.[1]. □

Grâce à (1), on peut donc interpréter les espaces de Hilbert à base au plus dénombrable comme des espaces vectoriels à coordonnées, puisque pour $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Vect}\left((h_i)_{i\in I}\right)}$ un espace de Hilbert réel et I a.p.d., les applications $\cdot \in \mathcal{H} \mapsto \langle \cdot, h_i\rangle \in \mathbb{R}$ permettent grosso modo de reporter les coordonnées de tous les points de $\mathcal{H}$ évalués par rapport à chaque h_i pour $i \in I$.

Lemme. Prenons $N \in (\mathbb{N}-\{0\}) \cup \{\mathbb{N}\}$. Tous les $\mathbb{R}^N$ sont équipotents à $]0,1[$. (2)

Preuve. On peut simplement expliciter deux bijections de $]0,1[$ avec $\mathbb{R}^k$ pour $k \in \mathbb{N}-\{0\}$ arbitraire, puis de $]0,1[$ avec $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$$\text{🐔}_1 \;:\; \begin{array}{ccc}]0,1[& \longleftrightarrow & \mathbb{R}^k \\ 0.d_1d_2d_3\ldots & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cot(\pi\cdot 0.d_1d_{k+1}d_{2k+1}d_{3k+1}\ldots) \\ \cot(\pi\cdot 0.d_2d_{k+2}d_{2k+2}d_{3k+2}\ldots) \\ \vdots \\ \cot(\pi\cdot 0.d_kd_{k+k}d_{2k+k}d_{3k+k}\ldots) \end{pmatrix} \\ \| & & \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} 10^{-k}d_k & & \end{array}$$

$$\text{🐔}_2 \;:\; \begin{array}{ccc}]0,1[& \longleftrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ 0.d_1d_2d_3\ldots & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cot(\pi\cdot 0.d_{2^0\cdot 1}d_{2^0\cdot 3}d_{2^0\cdot 5}d_{2^0\cdot 7}d_{2^0\cdot 9}\ldots) \\ \cot(\pi\cdot 0.d_{2^1\cdot 1}d_{2^1\cdot 3}d_{2^1\cdot 5}d_{2^1\cdot 7}d_{2^1\cdot 9}\ldots) \\ \cot(\pi\cdot 0.d_{2^2\cdot 1}d_{2^2\cdot 3}d_{2^2\cdot 5}d_{2^2\cdot 7}d_{2^2\cdot 9}\ldots) \\ \vdots \end{pmatrix} \\ \| & & \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} 10^{-k}d_k & & \end{array}$$

Ça conclut donc notre preuve constructivement. □

Définition. Un **diagramme spectral** (parfois appelé *spectrogramme*, mais y a confusion possible avec le *sonagramme* qu'on verra plus tard) d'un point $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ espace de Hilbert à base $(h_i)_{i\in I}$, en prenant $I \in \{\mathbb{N}-\{0\}\} \cup \{]a,b[\} \cup \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{1..k\}$ et $\varphi \in \mathrm{Bij}(\mathbb{N}-\{0\},\Omega)$, avec $\Omega \subseteq [a,b]$ tel que $\mathrm{card}(\Omega) = \mathrm{card}(I)$, peut être représenté en nuage de points et noté $\Sigma(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(x), \langle \mathbf{x}, h_i\rangle)_{i\in I}$. (3)

[1] Voir Théorème 4.6.16 ici : [lien]

Pour tout espace de Hilbert $\mathcal{H}$ à base a.p.d., $\mathcal{H}$ bijecte alors par (1) et (2) avec $]0,1[$. En outre, pour tout $\psi \in \mathrm{Bij}(\mathcal{H},]0,1[)$, on a $(\psi(\cdot),\cdot) : P(\mathcal{H}) \to P(]0,1[)$ bijective. Ainsi, en fixant $\psi \in \mathrm{Bij}(\mathcal{H},]0,1[)$, on pourrait même grapher chaque $E \subseteq \mathcal{H}$ avec $\psi(E)$, avec chaque ψ-graphe étant associé à une unique partie $E \subseteq \mathcal{H}$, mais dépendant malheureusement de ψ, donc c'est faussement unidimensionnel.

Pour pallier cette incongruité, on peut alors se servir des diagrammes spectraux de chaque point, définis dans (3), en utilisant les coordonnées obtenues par les produits scalaires des différents points par les vecteurs de la base hilbertienne, diagrammes qu'on peut coller sur le faisceau de plans $\psi(\cdot)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (plus spécifiquement $\psi(\cdot)\times*(\cdot)$ en réalité) normaux à chaque point de $]0,1[\times\{0\}\times\{0\}$ atteint par l'image de $\psi(\cdot)\times\{0\}\times\{0\}$ — les $\times\{0\}\times\{0\}$ permettant de passer dans un espace de dimension ambiente 3. Le diagramme résultant peut être appelé un **sonagramme** (souvent appelé *spectrogramme* en traitement de signal audio).

Bien sûr, ça dépend encore de la bijection utilisée, cependant tous ces graphes sont désormais des réarrangements entre eux des diagrammes spectraux mis en "brochettes" de la sorte sur le segment $]0,1[\times\{0\}\times\{0\}$. Ainsi, tout sonagramme est unique à une bijection de $]0,1[\times\{0\}\times\{0\}$ près pour l'emplacement de chaque diagramme spectral. Y a techniquement toujours le souci du choix de la bijection entre l'indexation des vecteurs de la base hilbertienne vers $\{1..n\}$ pour $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ ou $\mathbb{N}-\{0\}$ selon le cas, mais la plupart du temps on indexe déjà sur $\{1..n\}$ ou $\mathbb{N}-\{0\}$, et au pire on peut juste indiquer à l'avant du diagramme quels axes correspondent à qui dans la base hilbertienne, que ce soit pour les diagrammes spectraux ou les spectrographes, d'ailleurs.

Histoire de faire des graphes moins moches, en dimension k finie, y existent des suites qu'on appelle "courbes" remplissantes (le "courbe" étant une synecdoque, étant donnée que c'est une suite de courbes), qui ne s'intersectent pas et qui a la propriété que, en bifurquant récursivement $[0,1]^k$ en petits cubes $\prod_{k=1}^{n}[\beta(k)/2^n, (\beta(k)+1)/2^n]$ pour tout $\beta \in \mathrm{Sym}(\{0..2^n-1\})$ ainsi que $n \in \mathbb{N}$, chacun de ces petits cubes contient au moins un point de la $n$ième courbe en leur intérieur.

On note $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^k)^{\mathbb{N}}$ une telle suite de courbes, disons celle de Hilbert[2] (encore lui). Par la bifurcation récursive dite précédemment, on a que $\sup_{x\in[0,1]^k}\ \inf_{y\in\mathrm{im}(\gamma_n)} \|x-y\|_{\ell^2} = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(2^{-n})$, donc $\sup_{x\in[-n,n]^k}\ \inf_{y\in\mathrm{im}(\gamma_n)} \|x-2(y-1/2)n\|_{\ell^2} = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(n/2^{-n})$ en tend alors vers 0, donc $(2(\gamma_n - 1/2)n)_{n\in\mathbb{N}}$ "remplit" $\mathbb{R}^k$, dans le sens où pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, y existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ tel que $2(\gamma_n(x_n)-1/2)n \to \mathbf{x}$ quand $n \to +\infty$. (3)

Pour tout $E \subseteq \mathbb{R}^k$ et $\varepsilon > 0$, on définit $\Downarrow(E,\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \{B_{\mathbb{R}^k}(\mathbf{x},\varepsilon) : \mathbf{x} \in E\} = \{\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\ell^2} < \varepsilon : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k\} : \mathbf{x} \in E\}$. *Il me semble qu'on peut parler d'une fibration de E par des k-boules mais je vais éviter de trop m'avancer.* En utilisant (3), on a alors que pour tout $E \subseteq \mathbb{R}^k$ borné, et pour tout $\varepsilon > 0$, y existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $E \subseteq \Downarrow(\mathrm{im}(2(\gamma_n|_{]0,1[} - 1/2)n|),\varepsilon)$, et pour un tel n, on peut alors utiliser $\mathrm{im}\big((\psi(\cdot)\times*(\cdot)) \circ \big(2(\gamma_n|_{(2(\gamma_n-1/2)n)^{-1}(\Downarrow(E,\varepsilon))}(\cdot)-1/2)n\big)\big)$ comme un "dessin" de sonagramme valable pour E, c.à.d. qu'y existent $\varepsilon > 0$ et un sonagramme valable G_E de E tels que $E \subseteq \Downarrow(G_E,\varepsilon)$. Concrètement, on peut utiliser $\varepsilon \approx 0.1$ m.m. (l'épaisseur d'une feuille A4).

[2] "Courbe de Hilbert", section *Généralisation en dimension supérieure*. Wikipédia. [lien]